数理解析研究所講究録
813巻 1992年 51-62

knotted torus の peripheral subgroup と surface group の second homology について

神戸大自然科学　風間建一郎
(Ken-ichiro Kazama)

§1. Introduction

F を S^4 に埋め込まれたトーラス, X をその exterior, $i:\partial X \hookrightarrow X$ を inclusion とする。F の peripheral subgroup とは $i_*(\pi_1(\partial X))$ のこと。$\pi_1(\partial X) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_1(F)$ で, $\mathbb{Z}$ は i_* で injective に $\pi_1(X)$ へ入るから, $i_*(\pi_1(\partial X)) \cong \mathbb{Z} \oplus (\pi_1(F)$ の quotient$)$。2つめの factor を F の type とよび, $\tau(F)$ と書く。また, $\pi_1(S^4 - F)$ を πF と書く。さらに, 群 G, H に対して, $G \leq H \Leftrightarrow G$ は H の quotient, とする。定義より $\tau(F) \leq \mathbb{Z}^2$, また, Hopf の定理より $H_2(\pi F) \leq \mathbb{Z}^2$ である。ここで, Hopf の定理とは次のもの。

定理. X を連結な CW-complex とする。$H: H_2(X) \to H_2(\pi_1(X))$ が存在して, $\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X) \xrightarrow{H} H_2(\pi_1(X)) \to 0$: exact.

ただし h は Hurewicz の準同型。

$H_2(\pi F)$ については, 上の事実の逆が, Litherland により示さ

れている。

定理（Litherland）．任意の $A \le \mathbb{Z}^2$ に対して，$H_2(\pi F) \cong A$ となるトーラス $F \subset S^4$ が存在する。

一方，$\tau(F)$ についてはあまり知られていない。F が unknotted（S^4 で solid torus を bound する）のとき 0，F が knot を spin してできるトーラスのとき $\mathbb{Z}$，また，Asano，Litherland により $\tau(F) \cong \mathbb{Z}^2$ となる例が知られている。しかし $\tau(F)$ が free abelian でない例は，Boyle により $\mathbb{Z}_n$，$n=2, 5, 10$ の3つが知られているのみであった。

Litherland により，$H_2(\pi F) \le \tau(F) \le \mathbb{Z}^2$ の関係が知られている。そこで，次の問題を考える。

問題．$A \le B \le \mathbb{Z}^2$ をみたす任意の abel 群の組 (A, B) に対して，$H_2(\pi F) \cong A$，$\tau(F) \cong B$ となるトーラス $F \subset S^4$ が存在するか？

ここでは，部分的な解として，次のことを示す。

定理．abel 群 A，B が次の条件をみたすとき，$H_2(\pi F) \cong A$，$\tau(F) \cong B$ となるトーラス F が存在する。

条件：$A \le B$，$B \cong \mathbb{Z}_n$ or $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$

ただし $A \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}$，$B \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}$，$m|n$，を除く。

以下，この証明をいくつかの場合に分けて，述べる。なお，$H_2(\pi F)$ も $\tau(F)$ も connected sum に対して直和になるので，上

の結果の，genusが2以上の場合への適当な拡張も可能である。

PLまたはsmoothのcategoryで考えるものとし，ホモロジー群の係数はすべて$\mathbb{Z}$とする。位数がmの巡回群は$\mathbb{Z}_m$で表わし，特に$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_1 = 0$とする。整数$p$，$q$に対して，$p|q \Leftrightarrow p$は$q$の約数，また，$(p, q) = p$と$q$の最大公約数。

§2. $H_2(\tilde{\pi} F) = 0$，$\tau(F) \cong \mathbb{Z}_p$．

このようなFは，trefoilの6-twist-spun 2-knotに1-handleをattachすることにより得られる。詳しくは，この講究録中の，金信氏による項を参照してください。

§3. satelliteについて

§4以下で，§2の条件をみたすFをもとにして，残りの場合のトーラスを構成する．ここでは，その際必要となる構成法について述べる。

Kを，$D^2 \times \partial B^2$の内部に含まれるknotとする。solid torus $D^2 \times \partial B^2$が$\mathbb{R}^3$にstandardに埋め込まれていると考えて，同時にKを$\mathbb{R}^3$内のknotとみなす。$T = K \times S^1 \subset D^2 \times \partial B^2 \times S^1$とおく．$F \subset S^4$をトーラスとし，$\alpha : \{0\} \times \partial B^2 \times S^1 \longrightarrow F$をhomeomorphismとする。ただし0は$D^2$の中心，また，1で，$\partial B^2$，$S^1$または$\partial D^2$上の一点を表わす．$\beta : D^2 \times \partial B^2 \times S^1 \longrightarrow S^4$を，$\alpha$のcanonical extension とする。ここで, canonical extension とは次のような意味: β は α の拡張であって, β を $\{1\}\times\partial B^2\times S^1$ に制限したものを β' とすると, $\beta'_*: H_1(\{1\}\times\partial B^2\times S^1)\to H_1(S^4-F)$ は 0-map。$F^*=\beta(T)$ のことを, T を pattern, F を companion とする satellite torus と呼ぶ。

πF^* は, F の exterior と $D^2\times\partial B^2\times S^1-T$ から, van Kampen の定理で計算できる。$G=\pi_1(D^2\times\partial B^2\times S^1-T)=\pi_1(D^2\times\partial B^2-K)\times\langle t\mid -\rangle$, $H=\pi_1(\partial D^2\times\partial B^2\times S^1)$ とおく。ただし t は loop $1\times1\times S^1$ で表わされるもの。H の generator を, $x=[\partial D^2\times1\times1]$, $y=[1\times\partial B^2\times1]$, $z=[1\times1\times S^1]$ とする。$\alpha_+: H\to\pi F$ を, $\beta|\partial D^2\times\partial B^2\times S^1$ から induce される map, また, $i:\partial D^2\times\partial B^2\times S^1\hookrightarrow D^2\times\partial B^2\times S^1-T$ を inclusion とする。すると, $\pi F^*\cong\langle\pi F, G\mid\alpha_+(h)=i_*(h), h\in H\rangle$ である。$\bar G$ と $\bar H$ を, $\bar G=\langle G\mid i_*(k)=1, k\in\ker\alpha_+\rangle$, $\bar H=\langle H\mid k=1, k\in\ker\alpha_+\rangle$ で定義し, $\bar\alpha_+$, $\bar i_*$ を, 次の図式が可換になるものとする。

$$\begin{array}{ccccc}\pi F & \xleftarrow{\alpha_+} & H & \xrightarrow{i_*} & G\\ \downarrow{\scriptstyle id.} & & \downarrow & & \downarrow\\ \pi F & \xleftarrow{\bar\alpha_+} & \bar H & \xrightarrow{\bar i_*} & \bar G\end{array}$$

ただし2つの↓は canonical projection. 定義より $\bar\alpha_+$ は単射で, また, §4 以下においては, $\bar i_*$ も単射である。したがって

$$(*)\quad \pi F^*\cong\langle\bar G, \pi F\mid\bar\alpha_+(\bar h)=\bar i_*(\bar h), \bar h\in\bar H\rangle$$

であり，これは amalgamated free product としての表示になっている。一般に，amalgamated free product $G = G_1 *_A G_2$ に対して，Mayer-Vietoris の完全系列：

$$\cdots \to H_i(A) \to H_i(G_1) \oplus H_i(G_2) \to H_i(G) \to H_{i-1}(A) \to \cdots$$

が成り立つ。また，$(\bar{i}_*, -\bar{\alpha}_+) : H_1(\bar{H}) \to H_1(\bar{G}) \oplus H_1(\pi F)$ は単射なので，(*) より，

$$(**) \quad H_2(\bar{H}) \to H_2(\bar{G}) \oplus H_2(\pi F) \to H_2(\pi F^*) \to 0$$

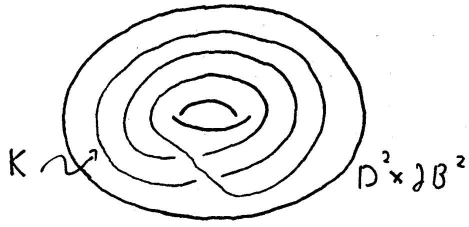
を得る。

$D^2 \times \partial B^2$ での K の tubular neighbourhood を V とすると，$\beta(V \times S^1)$ が F^* の tub. nbd である。したがって，μ，λ で K の meridian，longitude を表わすと，F^* の peripheral subgroup は，t，μ，λ (πF^* の中での images) で生成される。μ は F^* の meridian になるので，$\tau(F^*)$ は t と λ で生成される。

§4. $H_2(\pi F^*) \cong \mathbb{Z}_q$，$\tau(F^*) \cong \mathbb{Z}_p$，$q | p$.

ここでは，satellite をとることにより，上のような F^* を構成する。ただし，$q=0$，つまり $H_2(\pi F) \cong \mathbb{Z}$，$\tau(F) \cong \mathbb{Z}$ であるような F は Gordon が構成しているので，$q \geq 1$ とする。

companion として，$H_2(\pi F) = 0$，$\tau(F) \cong \mathbb{Z}_p$ となる F をとる。また，K として，$D^2 \times \partial B^2$ 内の $(q,1)$-torus knot をとる。従って，K は，(i) $H_1(D^2 \times \partial B^2)$ において generator の q 倍，



($q=3$ のとき)

(ii) $\mathbb{R}^3$ で trivial, (iii) $D^2\times\partial B^2$ で geometrically essential。(iii) より、i_* が、従って $\bar{i}_*$ が、単射であることがわかる。また、$\tau(F)\cong\mathbb{Z}_p$ だから、α として $\ker\alpha_*=\langle y\rangle\oplus\langle z^p\rangle$ となるものをとる。

$G=\pi_1(D^2\times\partial B^2-K)\times\langle t\mid -\rangle$ で、$i_*(z)=t$。また、

$\langle\pi_1(D^2\times\partial B^2-K)\mid i_*(y)=1\rangle$ は、$D^2\times\partial B^2-K$ に、$1\times\partial B^2$ に沿って 2-cell を張りつけたものの π_1。これは $\mathbb{R}^3-K$ とホモトピー同値だから、$\bar{G}=\langle G\mid i_*(y)=i_*(z^p)=1\rangle=\pi_1(\mathbb{R}^3-K)\times\langle t\mid t^p=1\rangle$

$=\langle\mu\mid -\rangle\oplus\langle t\mid t^p=1\rangle$ ((ii) より $\pi_1(\mathbb{R}^3-K)=\langle\mu\mid -\rangle\cong\mathbb{Z}$)。また、

$\bar{H}=\langle x\mid -\rangle\oplus\langle z\mid z^p=1\rangle$ で、$\bar{i}_*:\bar{H}\to\bar{G}$ により、$\bar{i}_*(x)=q\mu$、$\bar{i}_*(z)=t$ である。Künneth の定理より、$\bar{i}_*:H_2(\bar{H})\to H_2(\bar{G})$ は次のように split する。

$$\begin{tikzcd}
H_2(\bar{H}) \arrow[rr, "\bar{i}_*"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & H_2(\bar{G}) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
H_1(\mathbb{Z})\otimes H_1(\mathbb{Z}_p) \arrow[d, phantom, "\cong"] & & H_1(\mathbb{Z})\otimes H_1(\mathbb{Z}_p) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_p \arrow[rr, bend right, "\times q"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}."] & & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_p
\end{tikzcd}$$

$H_2(\pi F)=0$ であったから、(**) より、

$$H_2(\pi F^*)\cong\mathbb{Z}_{(p,q)}=\mathbb{Z}_q.$$

$\tau(F^*)$ は t と λ で生成されるが、knot K の条件 (ii) より、

λ は $\bar{G}$ で trivial. また, t は $\bar{G}$ で order p であり, $\bar{G} \hookrightarrow \pi F^*$ だから,

$$\tau(F^*) \cong \mathbb{Z}_p 。$$

[Remark] ここでは, K は上の (i), (iii) をみたすものとし, $\mathbb{R}^3$ で trivial, は仮定しない. sphere theorem より, $D^2\times\partial B^2 - K$ は aspherical. 従って $H_2(G) = H_2((D^2\times\partial B^2 - K)\times S^1)$ である. m, ℓ を, K の meridian と longitude を表わす, $D^2\times\partial B^2 - K$ の中の loop とする. $H_2((D^2\times\partial B^2 - K)\times S^1)$ は, 3つの generator, $[m\times\ell]$, $[m\times S^1]$, $[\ell\times S^1]$ を持つ。$D^2\times\partial B^2 - K$ に, $1\times\partial B^2$ に沿って 2-cell e^2 を張りつけると, $H_2(\{(D^2\times\partial B^2 - K)\cup e^2\}\times S^1)$ において, $[\ell\times S^1] = 0$. $(D^2\times\partial B^2 - K)\cup e^2$ を $D^3 - K$ と同一視し, D^3 の外側に 3-cell e^3 を張りつけると, $S^3 - K$ を得る. $H_2((S^3-K)\times S^1)$ において, $[m\times\ell] = 0$. e^3 を張りつけても基本群は変わらないことに注意して, 次の可換な図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
H_2(G) & \xleftarrow{=} & H_2((D^2\times\partial B^2 - K)\times S^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_2(\bar{G}) & \xleftarrow{H} & H_2((D^3 - K)\times S^1) \\
\| & & \downarrow \\
H_2(\bar{G}) & \xleftarrow{H} & H_2((S^3 - K)\times S^1)
\end{array}$$

左の↓は projection, 右の2つの↓は inclusion から induce される map で, H は Hopf の定理に出てくるもの。これらの map は

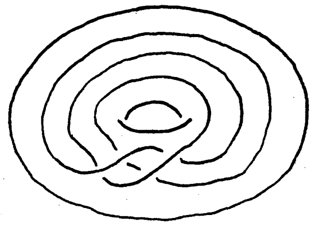
すべて全射である。従って，$H_2(G)$ の generator のうち，$[m\times S^1]$ に対応するものの image が $H_2(\bar{G})$ を生成し，$[m\times \ell]$，$[\ell\times S^1]$ に対応するものの $H_2(\bar{G})$ での image は 0 である。$H_2(\pi F)=0$ となるように F をとったので，(**) より，$[m\times S^1]$ の image が $H_2(\pi F^*)$ を生成することになる。

この事実は，§6 で使われる。

§5. $H_2(\pi F^*)\cong \mathbb{Z}_q$, $\tau(F^*)\cong\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}$, $q|p$

ここでは，上のような F^* を構成する。ただし，$q\geq 1$ とする。companion F と homeomorphism α は §4 と同じようにとる。つまり，$H_2(\pi F)=0$，$\tau(F)\cong\mathbb{Z}_p$ で，α は，$\ker\alpha_*=\langle y\rangle\oplus\langle z^p\rangle$ となるもの。K のとり方は，次のようにする。$q=1$ のときは，$D^2\times\partial B^2$ の core を local に knot させたものを K とし，$q\geq 2$ のときは，$D^2\times\partial B^2$ 内の (q,r)-torus knot ($\mathbb{R}^3$ で non-trivial なもの) とする。

$q=1$



$q=3$

このとき K は，(i) $H_1(D^2\times\partial B^2)$ において generator の q 倍，(ii) $\mathbb{R}^3$ で non-trivial，(iii) $D^2\times\partial B^2$ で geometrically essential.

ホモロジーの計算は，("$\pi_1(\mathbb{R}^3-K)=\langle\mu|-\rangle$" を除いて) §4

と同じで，$H_2(\pi F^*) \cong \mathbb{Z}_q$ を得る。しかし，K の longitude λ は $\bar{G} = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \times \langle t \mid t^p = 1 \rangle$ でも order は ∞ であり，$\bar{G} \hookrightarrow \pi F^*$ だから，$\tau(F^*) \cong \langle t \mid t^p = 1 \rangle \oplus \langle \lambda \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}$ である。

§6. $H_2(\pi F^*) \cong \mathbb{Z}_{q_1^*} \oplus \mathbb{Z}_{q_2^*}$，$\tau(F^*) \cong \mathbb{Z}_{p^*} \oplus \mathbb{Z}$，$q_1^* \mid p^*$

上のような F^* を構成する。ただし $q_2^* = 0$ は除き，また $q_2^* = 1$ のときは §5 で済んでいるので，$q_2^* \geq 2$ とする。また $p^* = 0$ の場合は Litherland がこのような F^* を構成しているので，$p^* \neq 0$（従って $q_1^* \neq 0$）とする。

p，q_1，q_2 を，$p = p^* \times (p^*, q_2^*)$，$q_1 = q_1^*$，$q_2 = q_2^*$ で定める。$q_1 \mid p$ だから，§5 より，$H_2(\pi F) \cong \mathbb{Z}_{q_1}$，$\tau(F) \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}$ となる F が存在する。この F を companion とし，K は，§4 同様，$(q_2, 1)$-torus knot とする。また，α を，$\ker \alpha_* = \langle y^p \rangle$ となるようにとる。$\bar{H} = \langle H \mid \ker \alpha_* = 1 \rangle = \langle x, y, z \mid y^p = 1 \rangle$，また，$\bar{G} = \langle G \mid i_*(y^p) = 1 \rangle = \langle \pi_1(D^2 \times \partial B^2 - K) \mid i_*(y^p) = 1 \rangle \times \langle t \mid - \rangle$。1つめの factor を Γ とおく。これは，$D^2 \times \partial B^2 - K$ に，$1 \times \partial B^2$ に沿って，2-cell e^2 を，degree p の map で張りつけた空間の基本群：$\Gamma = \pi_1((D^2 \times \partial B^2 - K) \cup_p e^2)$。従って，$H_1(\Gamma) = \langle \mu \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle$. また，$H_2(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_p$ であることがわかる。

(**) を使って $H_2(\pi F^*)$ を計算するため，まず $i_* : H_2(\bar{H}) \to H_2(\bar{G})$ を決定する。Künneth の定理より，

$$H_2(\bar{H}) = H_2(\langle x \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle \oplus \langle z \mid - \rangle)$$

$$\cong H_2(\langle x \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle) \otimes H_0(\langle z \mid - \rangle)$$

$$\oplus\ H_1(\langle x \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle) \otimes H_1(\langle z \mid - \rangle),$$

$$H_2(\bar{G}) = H_2(\Gamma \times \langle t \mid - \rangle)$$

$$\cong H_2(\Gamma) \otimes H_0(\langle t \mid - \rangle) \oplus H_1(\Gamma) \otimes H_1(\langle t \mid - \rangle).$$

これに対応して，$\bar{i}_* = i_1 \oplus i_2$ とする．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
H_2(\partial D^2 \times \partial B^2 \cup_p e^2) \arrow[r] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_2((D^2 \times \partial B^2 - K) \cup_p e^2) \arrow[d, "H"] \\
H_2(\langle x \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle) \arrow[r, "i_1"'] & H_2(\Gamma)
\end{tikzcd}$$

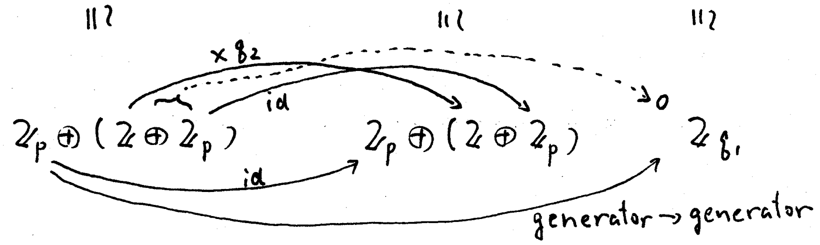
上の→は inclusion から induce されるもので，全射。従って i_1 も全射．$H_2(\langle x \mid - \rangle \oplus \langle y \mid y^p = 1 \rangle) \cong H_2(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_p$ だから，i_1 は同型である．また，i_2 により，$i_2(x) = \mu^{g_2}$，$i_2(y) = y$，$i_2(z) = t$．

次に，$\bar{\alpha}_* : H_2(\bar{H}) \to H_2(\pi F)$ を決定する．F は，satellite をとることにより得られた。その際の pattern を $K' \times S^1$ とする。ただし $K' \subset D^2 \times \partial B^2$．$m$ と ℓ を，K' の meridian と longitude に対応する，$D^2 \times \partial B^2 - K'$ の loop とする（§4 の Remark を参照）。$m \times \ell \times S^1$ を，F の，S^4 における tubular neighbourhood の boundary とみなす。$H_2(m \times \ell \times S^1)$ を $H_2(m \times S^1) \otimes H_0(\ell) \oplus H_1(m \times S^1) \otimes H_1(\ell)$ と分解すると，これは上の，$H_2(\bar{H})$ の分解と対応しており，canonical な map $H_2(m \times \ell \times S^1) \to H_2(H) \to H_2(\bar{H})$ は，この分解を保っている．（この§での議論と，F を構成したときとで，

y と z の方向が入れ代っていることに注意）　したがって、$[m\times S^1]$ の image が $H_2(\langle x|-\rangle\oplus\langle y|y^p=1\rangle)\otimes H_0(\langle z|-\rangle)$ を生成し、$[m\times \ell]$ と $[\ell\times S^1]$ の image が $H_1(\langle x|-\rangle\oplus\langle y|y^p=1\rangle)\otimes H_1(\langle z|-\rangle)$ を生成している。ところが §4 の Remark より、$[m\times S^1]$ は $H_2(\pi F)$ の generator へうつり、$[m\times \ell]$ と $[\ell\times S^1]$ は $H_2(\pi F)$ では 0 になっている。

以上をまとめると、次のとおり。

$$H_2(\tilde H) \longrightarrow H_2(\tilde G)\oplus H_2(\pi F) \longrightarrow H_2(\pi F^*) \to 0$$



したがって、

$$H_2(\pi F^*)\cong \mathbb{Z}_{g_1}\oplus\mathbb{Z}_{g_2}=\mathbb{Z}_{g_1^*}\oplus\mathbb{Z}_{g_2^*}.$$

$\pi(F^*)$ は、t と λ で生成される。$\tilde G=\cdots\times\langle t|-\rangle$ であったから、t は order ∞ のまま πF^* まで残る。また、K の（preferred）longitude は、$D^2\times\partial B^2-K$ において、$\partial D^2\times 1$ に沿って1回まわってから $1\times\partial B^2$ に沿って g_2 回まわる loop に homotopic。つまり $\lambda=x\cdot y^{g_2}$ と考えられる。$x=\mu^{g_2}$ だから、$\pi(F^*)$ の元としては y^{g_2} を考えればよい。$\tilde H=\langle x,y,z\,|\,y^p=1\rangle\subset \pi F^*$ だから、y の πF^* での order は p。従って y^{g_2} の order は $p/(p,g_2)$。これは、p の定義より、p^* に等しい。従って

$\tau(F^*) \cong \mathbb{Z}_{p^*} \oplus \mathbb{Z}$.

以上で，定理の証明が終わる。これ以外の場合，特に，$\tau(F) \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}$，$(p_1, p_2) \neq 1$ となるような F が存在するのかどうか，はわかっていない。少なくとも，2-knot + 1-handle では得られないので，S^4 内のトーラスの新しい構成法を考える必要がありそうだ。

References

1. C. McA. Gordon : Homology of groups of surfaces in the 4-sphere : Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89 (1981) 113-117

2. R. A. Litherland : The second homology of the group of a knotted surface : Quart. J. Oxford 32 (1981) 425-434

3. T. Kanenobu and K. Kazama : The peripheral subgroup and the second homology of the group of a knotted torus in S^4 (in preparation)